DTU Library

Skiveskaller

Statisk virkemåde og stabilitet

Almegaard, Henrik; Hansen, Klavs Feilberg

Published in:
Bygningsstatiske Meddelelser

Publication date:
2007

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Link back to DTU Orbit

Citation (APA):
Almegaard, H., & Hansen, K. F. (2007). Skiveskaller: Statisk virkemåde og stabilitet. *Bygningsstatiske Meddelelser*, *LXXVIII*(2), 29-54.

Årgang LXXVIII, Nr. 2, juni 2007

BYGNINGSSTATISKE MEDDELELSER

udgivet af

DANSK SELSKAB FOR BYGNINGSSTATIK

Proceedings of the Danish Society for Structural Science and Engineering

HENRIK ALMEGAARD OG KLAVS FEILBERG HANSEN
Skiveskaller. Statisk virkemåde og stabilitet …………………………………..29-54

KØBENHAVN 2007

ISSN 0106-3715 (trykt udgave)

ISSN 1601-6548 (online)

Årgang LXXVIII, Nr. 2, juni 2007

BYGNINGSSTATISKE MEDDELELSER

udgivet af

DANSK SELSKAB FOR BYGNINGSSTATIK

Proceedings of the Danish Society for Structural Science and Engineering

HENRIK ALMEGAARD OG KLAVS FEILBERG HANSEN
Skiveskaller. Statisk virkemåde og stabilitet …………………………………..29-54

KØBENHAVN 2007

Artikler offentliggjort i Bygningsstatiske Meddelelser har gennemgået review.

Papers published in the Proceedings of the Danish Society for Structural Science and Engineering have been reviewed.

Skiveskaller. Statisk virkemåde og stabilitet

1.1	Baggrund	29
1.2	Indledning	29
1.3	Statisk virkemåde	32
1.4	Stabilitet	35
1.5	Litteratur	53

BYGNINGSSTATISKE MEDDELELSER
Proceedings of the Danish Society for Structural Science and Engineering
Edited and published by the Danish Society for Structural Science and Engineering
Volume 78, No. 2, 2007, pp. 29-54

Skiveskaller
Statisk virkemåde og stabilitet

Henrik Almegaard*
Klavs Feilberg Hansen**

1.1 Baggrund

På det seneste har der fra forskellig side været interesse for at bygge skalkonstruktioner i andre materialer som fx glas. I den forbindelse er det fundet passende at udarbejde en mere samlet beskrivelse af skiveskallers grundlæggende statiske forhold.

1.2 Indledning

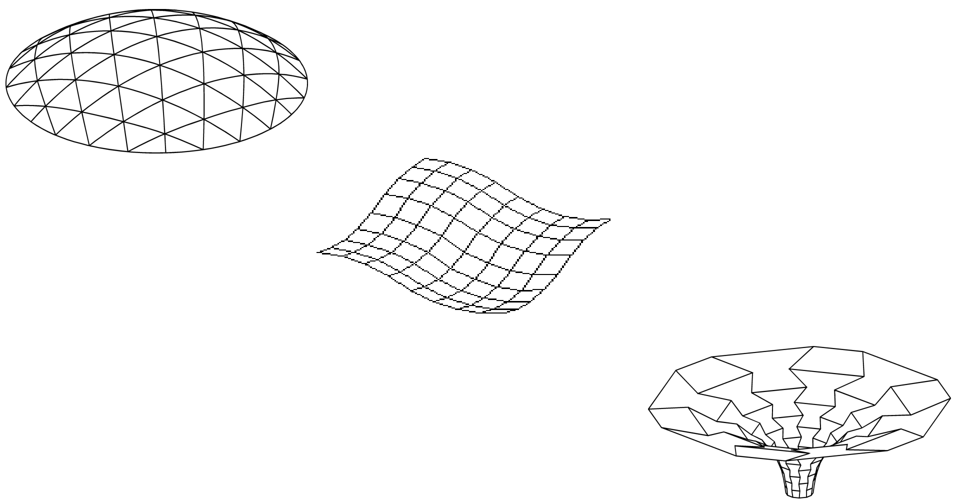
En skiveskal er en skal, der er opbygget af plane elementer. Ved at opbygge skaller af elementer - specielt plane elementer - er det muligt at konstruere skaller, der er både arkitektonisk, byggeteknisk og økonomisk interessante. Blandt andet åbnes der mulighed for at anvende materialer der kun produceres i pladeform og for at fremstille elementerne industrielt.

---

* Civilingeniør, ph.d. BYG.DTU.
** Civilingeniør, lic. techn. SBI.

Geometrisk set kan skalflader opbygges af plane flader, facetter, efter tre princip-per. Hvert med sin statiske virkemåde:

1. Skalflader opbygget af trekantede facetter. I det indre har de typisk seksgrenede hjørner. Her indgår kun hjørnerne og kanterne i det globale statiske system. Statisk kan skallen betragtes som en gitterskal opbygget af knuder i hjørnerne forbundet med stænger langs kanterne.
2. Skalflader opbygget af firkantede facetter og firgrenede hjørner. Her indgår både knuderne, kanterne og de plane flader i det globale statiske system. Statisk kan skallen betragtes som en hybridskal opbygget af knuder i hjørnerne forbundet med stænger langs kanterne, der igen er forbundet med skiver i facetterne med samlinger langs kanterne.
3. Skalflader opbygget med tregrenede hjørner. I det indre har de typisk sekskantede facetter. Her indgår kun de plane flader og kanterne i det globale statiske system, men ikke hjørnerne. Statisk kan skallen betragtes som en skiveskal opbygget af skiver i facetterne forbundet med samlinger langs kanterne (figur 1).



Figur 1. Eksempler på skaller opbygget af plane facetter: Gitterskal med trekantede facetter, hybridskal med firkantede facetter og firgrenede hjørner, samt skiveskal med tregrenede hjørner.

Gitterskaller er udførligt beskrevet mange steder, se fx (Makowski 1984). Hybridskaller udformes ofte som translationsflader, de såkaldte translationsskaller. De firkantede facetter indgår her som skiver i det globale statiske system. Alternativt kan en diagonal stang eller en afkrydsning med trækbånd anvendes til at stabilisere firkanterne, men da fremkommer en gitterskal. Translationsfladers udformning er beskrevet i (Vanggaard 1979 og Vanggaard and Thorsteinn 95) og deres stabilitetsforhold i (Almegaard 2004b). Skivekonstruktioners grundlæggende statiske og geometriske forhold var genstand for en del forskningsmæssig interesse i 1980'erne centreret omkring Kunstakademiets Arkitektskole og SBI, se fx (Buhelt, Nielsen & Staalby 1976), (Wester 1987), (Hansen 1988) og (Almegaard Ohlsen 1988). Denne fremstilling bygger videre på dette arbejde.

Skiveskallers geometri er planbaseret og ikke punktbaseret. Da de fleste CAD-programmer er punktbaserede, er det i mange tilfælde fordelagtigt at anvende specielle planbaserede programmer til fastlæggelse af geometrien. MOFALS (Hansen 1991) er et eksempel på et sådan CAD-program.

1.2.1 Definitioner

To plane naboelementer der ligger i samme plan, betragtes som et element.

Ved en skivekonstruktion forstås her en konstruktion – eller et statisk system - der geometrisk er karakteriseret ved at være opbygget af plane elementer og statisk er karakteriseret ved, at det enkelte element kun påvirker naboelementerne med skivekræfter. Der er således tale om en membrankonstruktion.

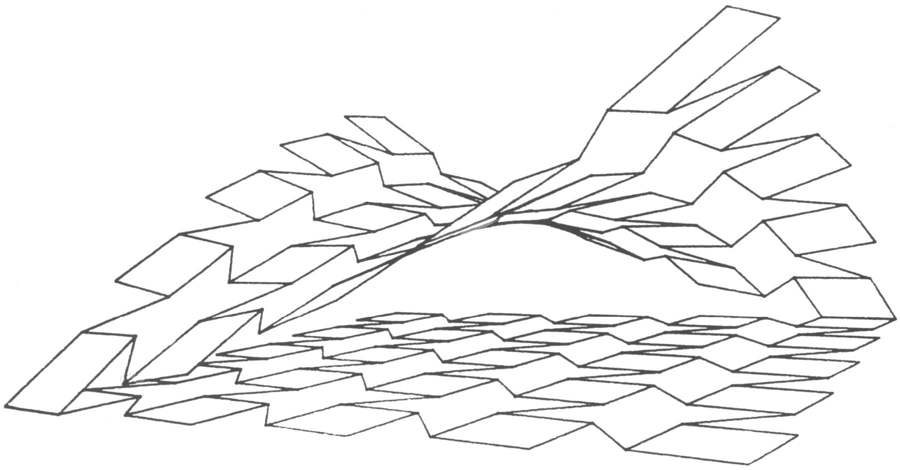
Det betyder at der hverken overføres bøjningsmomenter eller vridningsmomenter til naboelementerne. Samlingerne kan antages at være udformet som hængsler langs kanterne. Det betyder ikke, at der ses bort fra at der optræder bøjning og vridning i det enkelte element, men at disse snitkræfter ikke kan overføres til naboelementerne.

En skiveskal er en skal opbygget af et enkelt lag plane elementer, hvor elementerne kun påvirker naboelementerne med skivekræfter.

Dette viser sig at forudsætte, at hjørnerne er tregrenede (figur 2).

Da de eneste snitkræfter, der optræder i en skive, er normalkræfter og forskydningskræfter i skivens plan, gælder at en skiveskal kan betragtes som en facetteret membranskal[1].

[1] En membranskal er en skal, i hvilken de eneste snitkræfter, der optræder, er normalkræfter og forskydningskræfter i systemfladens tangentplan.



Figur 2. Eksempel på en mulig udformning af skiveskal. Skalfladen er opbygget af firkantede og af ottekantede elementer, hvis form som vist danner et regulært mønster i grundplanen. Understøtningerne er ikke vist.

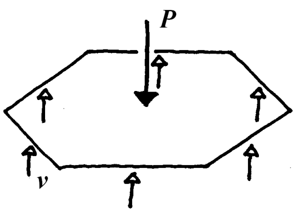
1.3 Statisk virkemåde

I det følgende betragtes en skiveskal, hvis elementer er indbyrdes simpelt understøttet, svarende til at de er samlet med pianohængsler langs kanterne. Der kan således ikke overføres bøjningsmoment om en akse i kantens retning imellem elementerne. Det gennemgås hvordan en belastning optages og overføres igennem skallens elementer til understøtningerne.

1.3.1 Pladelast

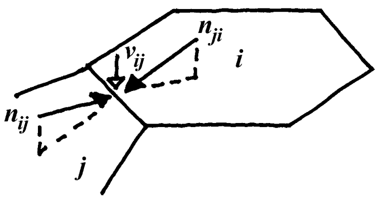
Dette afsnit beskriver hvordan pladebelastning føres ind som skivekræfter i konstruktionen.

Betragt et enkelt element. Den del af belastningen P på elementet, der virker vinkelret på dette, føres ud til kanterne ved bøjning og forskydning i elementet. Elementet virker som plade. Ved kanten optræder kun forskydningskræfter v vinkelret på elementets plan (figur 3).



Figur 3. Pladevirkning i element. Pladekræfter virker vinkelret på elementets plan. Af hensyn til figurens aflæselighed er kun kræfternes resultanter vist.

Da der ikke kan overføres bøjningsmomenter om kanterne mellem elementerne opløses tværforskydningskraften fra pladelasten på det betragtede element langs en given kant v_{ij}, i en normalkraft n_{ij} på kanten af betragtede element *i*, beliggende i elementets plan, og en normalkraft n_{ji} på naboelementet *j*, beliggende i naboelementets plan (figur 4).



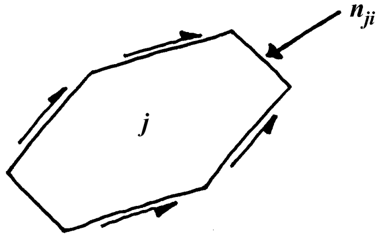
Figur 4. Normalkræfter på et element og dets naboelementer. Af hensyn til figurens aflæselighed er kun kræfternes resultanter vist.

Tilsvarende opløses tværforskydningskraften fra pladelasten på naboelementet i en normalkraft på kanten af det betragtede element og en normalkraft på naboelementet. Tværforskydningskræfternes og normalkræfternes fordeling langs kanterne afhænger af lasternes placering og elementernes stivhed. Det fremgår af afsnittet *Stabilitet* nedenfor, at systemets globale ligevægt ikke er afhængig af denne fordeling eller af resultantens placering, idet det er tilstrækkeligt med blot en punktformet forbindelse mellem elementerne langs hver kant. Vi vil derfor ikke interessere os for denne fordeling her.

Fordelingen af de resulterende normalkræfter n på elementerne kaldes *lokalkraftfordelingen*. Lokalkraftfordelingen afhænger af det betragtede elements form og stivhed, naboelementernes form og stivhed samt vinklen mellem elementerne. Lokalkraftfordelingen er statisk ubestemt.

1.3.2 Skivelast

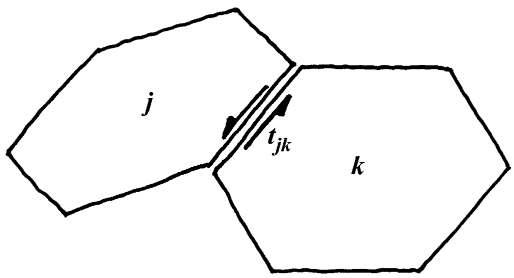
Lasten vinkelret på elementets plan er dermed overført til kræfter *i* elementets - og naboelementernes - plan. Konstruktionen kan herefter betragtes som en ren skivekonstruktion, der kun optager og overfører skivekræfter, altså (membran)kræfter i elementernes plan (figur 5).



Figur 5. Skiveelement med skivekræfter angivet. Skivekræfter ligger i elementets plan.

Den del af de resulterende normalkræfter på et givet element, der fremkommer som resultat af pladelasten på det pågældende element, er i ligevægt. Den resulterende skivelast på den enkelte skive består derfor af vektorsummen af de resulterende normalkræfter fra pladelasten på naboelementerne og den del af belastningen P på elementet, der virker i elementets plan.

Betragtes to plane elementer j og k, der støder op til hinanden langs en skæringslinie, ses at den eneste retning, der er fælles for de to elementers planer, er skæringsliniens retning. Derfor er den eneste skivekraft, der kan overføres mellem de to elementer, en forskydningskraft langs samlingen. Forskydningskraften er fordelt langs kanten, men vi vil ikke her interessere os for denne fordeling, men blot betragte den resulterende forskydningskraft t_{jk} (figur 6).



Figur 6. Samlinger med forskydningskraft mellem to elementer.

Fordelingen af de resulterende forskydningskræfter mellem skiverne, og mellem skiverne og understøtningerne, kaldes *den globale kraftfordeling*. Den afhænger af skallens form samt af placeringen af understøtningerne. Forudsat at skallen er stabil, se afsnittet *Stabilitet*, kan den globale kraftfordeling være statisk bestemt eller ubestemt.

Plane elementer er stærkere og stivere som skiver end som plader. Der er derfor generelt en materialeøkonomisk fordel ved at udnytte skive- eller membranvirkningen frem for pladevirkningen i rumlige konstruktioner.

1.3.3 Lokalkraftligevægt

Udsættes en terning opbygget af seks plane kvadratiske elementer for et ydre ensartet tryk, der påvirker alle elementer lige meget, vil

- alle elementer virke som plader

- alle elementer virke som skiver, idet de belastes med lige store normalkræfter på begge leder, men

- ingen elementer påvirkes af forskydningskræfter langs samlingerne

Der vil fremkomme et system af lokale normalkræfter i ligevægt, og det globale forskydningskraftsystem vil være inaktivt.

Lasttilfælde, defineret ved at de resulterende normalkræfter på hvert element og den del af belastningen på elementet, der virker i elementets plan er i ligevægt, fører til at der ikke optræder forskydningskræfter langs samlingerne. Kraftfordeling i konstruktionen kan kort karakteriseres ved, at der ikke overføres kræfter langs samlingerne, men udelukkende på tværs af samlingerne.

For visse fladeformer eksisterer der særligt simple lasttilfælde af denne type. For en facetteret kugle, som for eksempel en terning, er et ensartet tryk et sådan lasttilfælde. For en facetteret omdrejningsparaboloide er en jævnt fordelt last, der virker parallelt med omdrejningsparaboloidens akse, et sådan lasttilfælde.

1.3.4 Tregrenede hjørner

Et elastisk system opbygget af plane elementer, der er samlet langs kanterne, vil have en forøget stivhed overfor en kraftpåvirkning langs kanterne. En statisk model vil derfor almindeligvis omfatte et gitter med stænger langs kanterne og knuder i hjørnerne.

I skivekonstruktioner med tregrenede hjørner optræder der imidlertid ikke kræfter i dette gittersystem, med mindre at de påvirkes af koncentrerede ydre kræfter i hjørnerne.

Betragt en stang langs en kant. En normalkraft i denne stang kan ikke optages i hjørneknuden. Det kræver nemlig tre stænger at fastholde en knude i rummet og der er kun stængerne langs de to øvrige kanter til rådighed. De to stænger kan kun fastholde knuden i deres eget plan.

At hjørnerne er tregrenede betyder således, at der ikke optræder kræfter i hjørnepunkterne, og at hjørnerne ikke indgår i den statiske model, se (Wester & Hansen 1985).

1.3.5 Statisk beregning

På baggrund af den beskrevne virkemåde af skiveskallen kan der udarbejdes en statisk model og foretages en elastisk beregning af en given skal ved anvendelse af et FEM program med passende kant- og pladeelementer.

Forudsætningen for at kunne foretage en beregning er imidlertid at skallen er stabil betragtet som skivekonstruktion, det vil sige at konstruktionen er geometrisk og statisk bestemt eller eventuelt geometrisk overbestemt og statisk ubestemt.

1.4 Stabilitet

I dette afsnit undersøges de geometriske stabilitetsbetingelser for en skiveskal. Indledningsvis opstilles stabilitetsbetingelserne for henholdsvis skiver og plader. Derefter undersøges hvilke betingelser der kan opstilles for enkeltsammenhængende skivesystemers og skiveskallers stabilitet. Efter konklusionen gives to eksempler på hvordan betingelserne kan anvendes i forbindelse med udformning af konstruktioner.

Ved analyse af konstruktioners stabilitet er det hensigtsmæssigt at benytte følgende definition på en understøtning:

Definition

En *understøtning* fastholder et punkt i netop én retning.

En understøtning giver således anledning til netop én reaktion. En understøtning kan tænkes etableret ved hjælp af en stang, der udgår fra punktet i den pågældende retning og er fast simpelt understøttet i den modsatte ende.

Skiver

For at en skive er stabil, det vil sige fastholdt mod bevægelse i sit eget plan, skal den være geometrisk bestemt i dette plan. Det betyder at følgende to betingelser skal være opfyldt:

Stabilitetsbetingelser - skiver

1. Skiven skal fastholdes mod translation langs tre linier i skivens plan
2. De tre linier må ikke være parallelle eller skære hinanden i samme punkt

se fx (Buhelt, Nielsen og Staalby 1976).

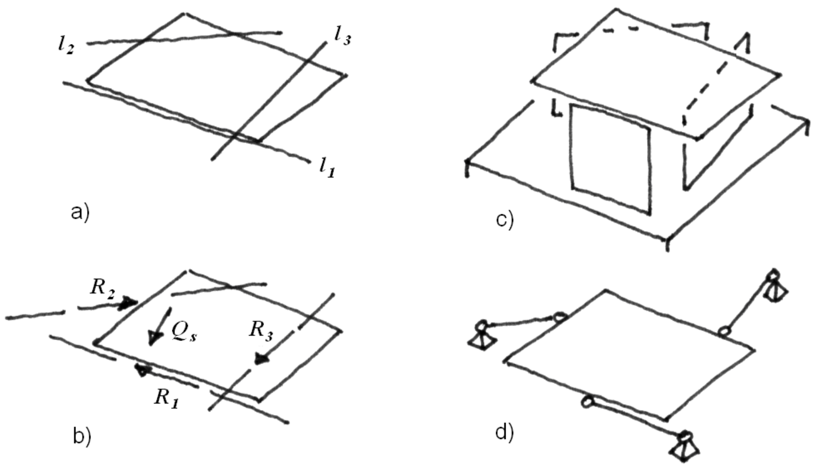
De tre linier kaldes *støttelinier*.

At skiven er fastholdt mod translation langs en linie betyder at den ikke kan flyttes langs linien, men kun vinkelret på linien. Dette betyder også at den kan drejes om et vilkårligt punkt på linien.

Definition

En *støttelinie* fastholder mindst ét punkt på støttelinien i liniens retning.

En støttelinie og en understøtning er altså statisk ækvivalente, idet de hver giver anledning til én reaktion. En støttelinie kan etableres ved hjælp af en forbindelse med en anden skive, hvis plan skærer den betragtede skive langs støttelinien og som selv er fastholdt i sit plan, eller ved hjælp af en understøtning af et punkt på støttelinien i liniens retning.



Figur 7. a) En skive der er fastholdt mod translation langs tre linier – støttelinier - der ligger i skivens plan og ikke er parallelle eller skærer hinanden i samme punkt er stabil. b)Til hver fastholdelse svarer en reaktion i støtteliniens retning. Reaktionen kan optages af c) en skive, hvis plan skærer den betragtede skive langs støttelinien og som selv fastholdt i sit plan, eller d) en stang langs støttelinien, der er fast simpelt understøttet i den modsatte ende.

Ved en påvirkning af skiven med en kraft i skivens plan giver de tre støttelinier anledning til tre reaktioner, hvis størrelser kan findes ved de tre ligevægtsligninger for skivens plan. Hvis der er mindre end tre reaktioner, er skiven bevægelig, hvis der er netop tre, er skiven statisk bestemt understøttet, og hvis der er flere end tre reaktioner, er skiven statisk ubestemt understøttet.

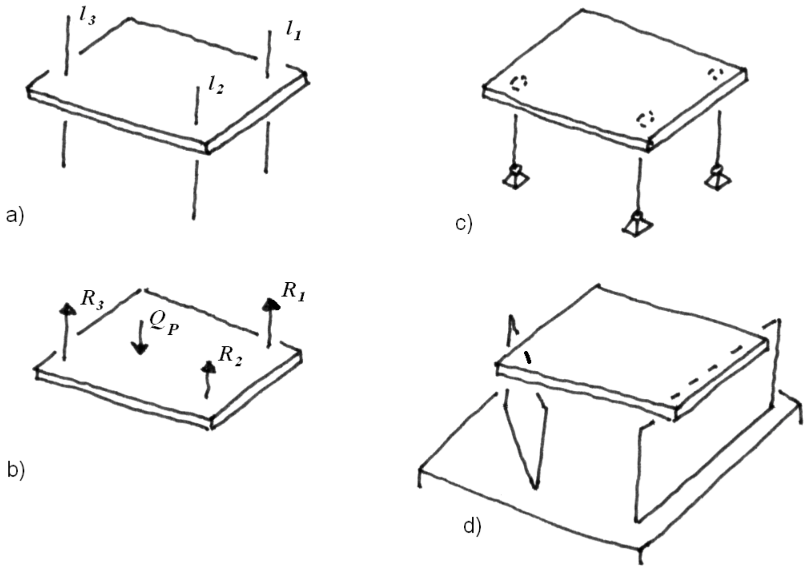
Det er almindeligvis let at sikre at de tre støttelinier ikke er parallelle eller skærer hinanden i samme punkt, ved at foretage en geometrisk kontrol af det enkelte skiveelement. Vi vil derfor i det følgende forudsætte at stabilitetsbetingelse 2 er opfyldt.

Plader

For at en plade er stabil, det vil sige fastholdt mod bevægelse vinkelret på sit eget plan, skal pladens plan være geometrisk bestemt. Det betyder at følgende to betingelser skal være opfyldt:

Stabilitetsbetingelser - plader

1. Pladen skal fastholdes mod translation langs tre linier, der skærer pladens plan under en ret vinkel
2. De tre skæringspunkter må ikke ligge på linie.



Figur 8. a) En plade, der er fastholdt mod translation langs tre linier, der skærer pladens plan under en ret vinkel, er stabil – forudsat at de tre skæringspunkter ikke ligger på linie. b)Til hver fastholdelse svarer en reaktion i pågældende linies retning. Reaktionen kan optages af c) en stang langs linien, der er fast simpelt understøttet i den modsatte ende, eller d) en skive, hvis plan indeholder denne line og som selv er fastholdt i sit plan.

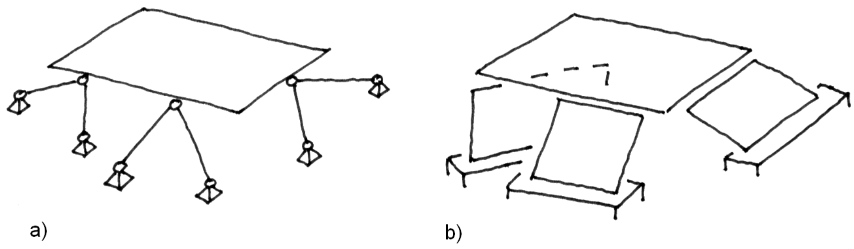
Det er almindeligvis let at sikre at de tre skæringspunkter ikke ligger på linie ved at foretage en geometrisk kontrol af det enkelte pladeelement. Vi vil derfor i det følgende forudsætte at stabilitetsbetingelse 4 er opfyldt.

Plane elementer

Antages et plant element at være fastholdt som skive, det vil sige fastholdt mod bevægelse i sit eget plan, ses at elementet også er fastholdt som plade, når det derudover er fastholdt langs tre linier, der skærer elementets plan.

Et plant element, der er fastholdt både som skive og som plade er fastholdt i rummet. Elementet er da fastholdt i 6 retninger og det kræver netop 6 understøtningsretninger at fastholde et stift legeme i rummet.

Specielt kan elementet fastholdes i tre punkter, således at det i hvert punkt er fastholdt i én retning, der ligger i elementets plan, og én retning, der skærer elementets plan. I hvert punkt danner de to retninger et plan, der skærer elementets plan. Da en skive netop kan optage og overføre kræfter i sit eget plan ses at et plant element er fastholdt i rummet, hvis det er fastholdt langs tre linier af tre skiver, hvis planer alle skærer det betragtede elements plan, og som hver især er fastholdt som skive (Figur 9).

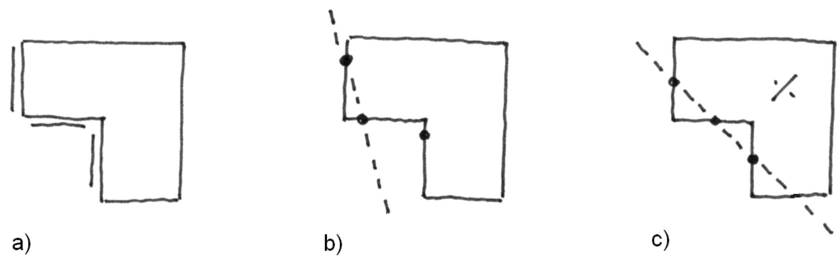


Figur 9. a) Et plant element er stabilt når det er fastholdt i tre punkter, således at det i hvert punkt er fastholdt i én retning, der ligger i elementets plan, og én retning, der skærer elementets plan. b) Et plant element er ligeledes stabilt hvis det er fastholdt af tre skiver, hvis planer alle skærer det betragtede elements plan og som hver er fastholdt som skive

De tre linier kaldes *faste støttelinier*, se (Buhelt, Nielsen og Staalby 1976).

En fast støttelinie er statisk ækvivalent med to understøtninger.

De tre faste støttelinier må ikke være parallelle eller skære hinanden i samme punkt, jf. stabilitetsbetingelse 2. Sker fastholdelsen i tre punkter må disse ikke ligge på linie, jf. stabilitetsbetingelse 4 (Figur 10).



Figur 10. a) Et plant element der er understøttet langs tre faste støttelinier, som ikke skærer hinanden i et punkt, er stabilt både som plade og skive. b) og c) Hvis fastholdelsen er udformet som punkter, er elementet kun stabilt som plade, hvis de tre punkter ikke ligger på linie.

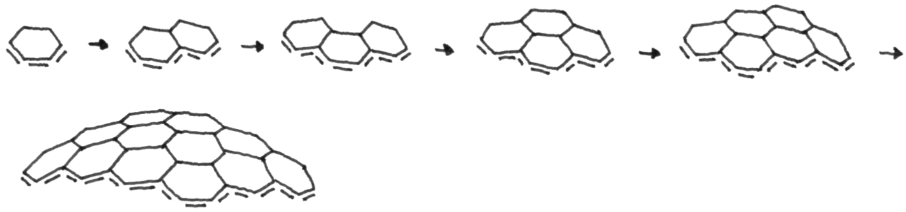
For en konstruktion udelukkende opbygget af plane elementer betyder dette, at:

Konstruktionens rumlige stabilitet kan sikres ved for hvert element alene at opfylde stabilitetsbetingelserne for skiver.

Det vil sige at konstruktionens rumlige stabilitet kan sikres ved alene at betragte den som en skivekonstruktion.

1.4.1 Successivt opbyggede systemer

På grundlag af stabilitetsbetingelserne for skiver kan der opbygges et stabilt skivesystem ved at tage udgangspunkt i en stabilt understøttet skive og successivt tilføje flere skiver. Det skal ske således at hver skive der tilføjes, fastholdes langs tre linier, specielt tre kanter, enten af tre skiver eller af tre understøtninger eller af en kombination heraf (figur 11).



Figur 11. Princippet i et successivt opbygget rumligt stabilt skivesystem. Den første skive understøttes langs tre retninger/kanter, derefter tilføjes skive efter skive, således at hver skive, der tilføjes, fastholdes i tre retninger enten af tre skiver eller af tre understøtninger eller af en kombination heraf. En understøtning er vist med en kort streg, der angiver den retning, hvori skiven er fastholdt.

Det successive princip sikrer således en rumligt stabil og statisk bestemt skivekonstruktion.

Successivt opbyggede systemer er stabile.

Princippet kan specielt anvendes til opbygning af skiveskaller hvor man ønsker en fri rand.

At systemet kan opbygges successivt betyder at det også kan nedbrydes successivt. Det vil sige, at hvis en færdig skiveskal kan "trævles" op ved skive for skive at fjerne de skiveelementer, der er fastholdt langs tre, og kun tre, linier, er skiveskallen successivt opbygget. ”Optrævling” kan i mange tilfælde anvendes til en hurtig kontrol af stabiliteten af en given skiveskal.

Som konstruktionen af ovennævnte stabile skivesystem viser, kan den første stabilitetsbetingelse også formuleres på følgende form, svarende til Maxwell’s tælleregel for rumlige gitre:

En *nødvendig betingelse* for at et skivesystem er *rumligt stabilt*, er at

$$s + u \geq 3n \qquad (1)$$

hvor s er antal samlinger, u er antal understøtninger/støttelinier og n er antal skiveelementer.

1.4.2 Stringermetoden

Stringermetoden, se (Almegaard 2003 og 2004a), er en generalisation af det successive princip. I stringermetoden anvendes et rumligt stangsystem, kaldet stringersystemet, som en geometrisk og statisk model af membranskallen. Ved at analysere stringersystemet kan man for en skal af vilkårlig form, finde de understøtningsbetingelser, der sikrer at skallen er rumligt stabil. Tre forhold viser sig at være afgørende:

- Systemets topologi

  I stringermetoden benyttes det successive princip til at danne et netværk, hvis topologi sikrer at den nødvendige betingelse for rumlig stabilitet (1) er opfyldt. Netværket er opbygget af tre sæt kurver, som kaldes stringere. Stringerne skærer hinanden i 6-grenede knuder, således at hver knude skæres af en stringer fra hvert sæt. For at stabilitetsbetingelsen (1) netop er opfyldt, skal hver stringer være understøttet i den ene ende.

- Fortegnet for fladens krumningsmål[2] (Gauss krumning)

  Fortegnet for skalfladens krumningsmål viser sig at være afgørende for hvilke systemer der med sikkerhed kan siges at være rumligt stabile.

- Systemets geometri

  For at systemet kan modellere membranskallen statisk, skal stringerne placeres således på fladen at fortegnet for systemets krumningsmål lokalt svarer til fortegnet for fladens krumningsmål. For flader opdelt i elementer bestemmer elementerne stringersystemets geometri.

Stringermetoden kan anvendes direkte på triangulerede gitterskaller, hvis de indre knuder er 6-grenede. Men stringermetoden kan også anvendes på skiveskaller, hvis de indre elementer er 6-kantede. Dette kan vises ved hjælp af ”dualmetoden”, der er udarbejdet af (Wester & Hansen 1985) og her skal beskrives kort.

Ved dualmetoden foretages en geometrisk transformation - den såkaldte dualtransformation - hvor den facetterede (skive-) flade med tregrenede hjørner transformeres til en facetteret (gitter-) flade med trekantede facetter. Skiveelementernes planer transformeres til knudepunkter og kanterne mellem skiverne transformeres til forbindelseslinier mellem de til skiverne svarende knuder. Fortegnet for krumningsmålet bevares. Ved dualtransformationen har vi således:

- skiverne transformeres til knudepunkter
- samlingerne mellem skiverne transformeres til stænger mellem de tilsvarende knuder
- fortegnet for krumningsmålet bevares

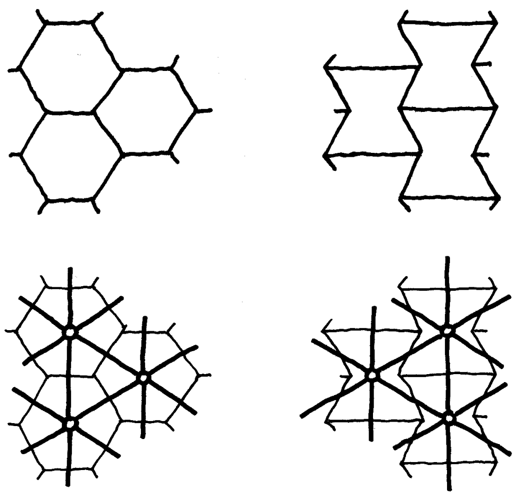
De tregrenede hjørner i skivesystemet sikrer at det duale gittersystem er trianguleret.

På en facetteret flade med tregrenede hjørner kan det lokale krumningsmål aflæses direkte af facetternes form, idet krumningen er koncentreret i hjørnerne. Et hjørne, hvor facethjørnernes indre vinkler er mindre end π, har et positivt krumningsmål og et hjørne, hvor den ene af de tre facethjørners indre vinkler er større end π, har et negativt krumningsmål, se (Wester 1987, side 67). En facetteret flade

[2] Krumningsmålet i et punkt på en flade er produktet af de to hovedkrumninger i punktet, se fx (Fabricius-Bjerre 1977).

med tregrenede hjørner, hvor det for alle hjørner gælder at facethjørnernes indre vinkler er mindre end π, har således et positivt krumningsmål og konvekse elementer. En facetteret flade med tregrenede hjørner, hvor det for alle hjørner gælder, at den ene af de tre facethjørners indre vinkler er større end π, har tilsvarende et negativt krumningsmål.

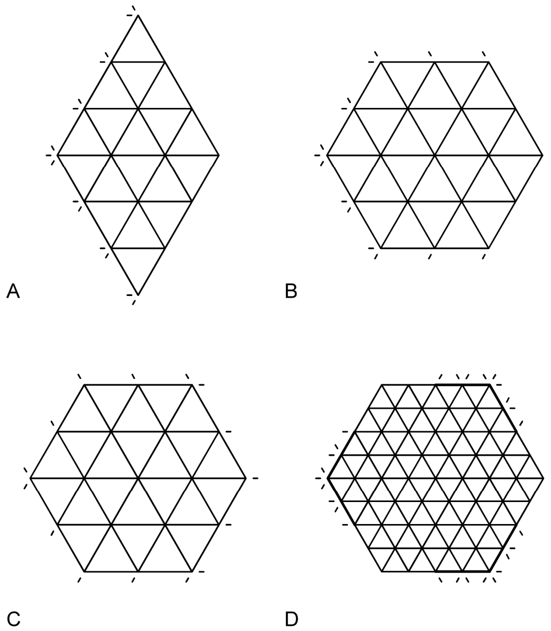
Da topologien og systemets placering på skiveskallen desuden fremgår direkte af skivernes placering og forbindelser, er det ikke nødvendigt at udføre selve dualtransformationen for at fastlægge det til skiveskallen svarende stringersystem. Stringersystemet kan tegnes direkte på skiveskallen, idet knudepunkterne blot placeres indenfor skiveelementerne fx i tyngdepunkterne og forbindelserne mellem knuderne tegnes, så de svarer til forbindelserne mellem skiverne (Figur 12).



Figur 12. Skiveelementer (øverst) og det tilhørende stringersystem (nederst), der kan tegnes direkte på elementerne. Til venstre elementer på en skiveskal med positivt krumningsmål. I hjørnerne er alle vinkler mellem kanterne der støder op til hjørnet, mindre end π. Til højre elementerne på en skiveskal med negativt krumningsmål. I hjørnerne på en negativt krum skiveskal er den ene af vinklerne mellem kanterne, der støder op til hjørnet, større end π.

Forudsætningen for at stringermetoden kan anvendes direkte på en skiveskal er således alene, at de indre elementer er forbundet med 6 naboelementer, altså at skiveelementerne er sekskantede.

I (Almegaard 2003) opstilles en række grundlæggende stringersystemer, karakteriseret ved at hver stringer er understøttet i den ene ende. Disse systemer kan hermed umiddelbart oversættes til skivesystemer. Vi vil her begrænse os til a betragte de enkeltsammenhængende systemer A, B, C og D (figur 13).



Figur 13. De grundlæggende stringersystemer A, B, C og D. Hver stringer er understøttet i den ene ende i en randknude. Understøtninger er vist i forlængelse af de stringere, der er understøttet i knuderne.

A Successivt opbygget system, med henholdsvis en dobbeltunderstøttet og en fri rand.

B Successivt opbygget system, med henholdsvis en dobbeltunderstøttet, to enkeltunderstøttede og en fri rand.

C Ikke-successivt opbygget system, med en enkeltunderstøttet rand.

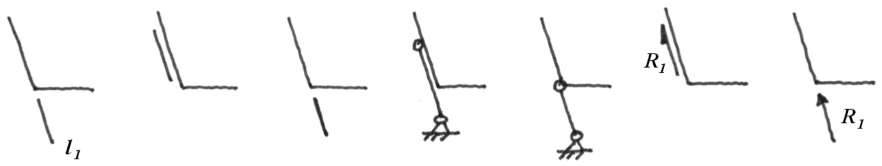
D Ikke-successivt opbygget system, med henholdsvis tre dobbeltunderstøttede og tre frie rande.

Da de successivt opbyggede systemer er behandlet ovenfor, er det her de ikke-successivt opbyggede systemer, der er af interesse. Det er systemerne C og D.

Inden disse to ikke-successivt opbyggede systemers stabilitetsforhold undersøges er det imidlertid nødvendigt at beskrive skiveskallernes understøtningsforhold mere generelt.

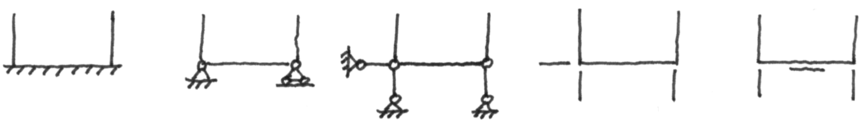
1.4.3 Understøtninger

En understøtning er som nævnt en understøtning, der virker i én retning. En understøtning fastholder således en skive mod translation langs én linie og svarer til én reaktionskomposant (figur 14).



Figur 14. En understøtning fastholder en skive mod translation langs én linie og kan angives på de viste måder.

En *simpelt understøttet skivekant* er fastholdt i to retninger i et punkt og i en retning i et andet punkt på den betragtede kant. Hvis en skives ene kant er simpelt understøttet, er skiven således fastholdt i sit eget plan, og som skive betragtet fast indspændt langs den pågældende kant (figur 15).



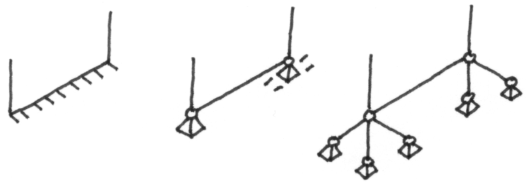
Figur 15. En simpelt understøttet skivekant er fastholdt langs tre linier og kan angives på de viste måder.

En *simpelt understøttet pladekant* er fastholdt vinkelret på pladens plan i alle punkter på kanten. Dette er statisk ækvivalent med at den er fastholdt vinkelret på pladens plan i to punkter på den betragtede kant. Hvis en plades ene kant er simpelt understøttet, skal den således blot være fastholdt vinkelret på dens plan i yderligere ét punkt for at pladen er fastholdt i sit eget plan.

I de tilfælde hvor det betragtede element er simpelt understøttet både som skive og plade langs en kant og indgår som et element i en stabil skivekonstruktion, vil det altid være samlet med mindst en anden skive i konstruktionen. Elementet vil derfor som minimum være fastholdt langs yderligere en kant af konstruktionen og det i en retning, der skærer elementets plan. Det vil sige at:

Et plant element, der indgår i en stabil skivekonstruktion og er simpelt understøttet både som skive og plade langs en kant, er stabilt.

I det følgende forudsættes et plant element, der er simpelt understøttet langs en kant, at være simpelt understøttet både som skive og som plade langs denne kant (figur 16).



Figur 16. Et plant element, der er simpelt understøttet langs en kant, forudsættes simpelt understøttet både som skive og som plade langs denne kant.

Understøtning af skaller

I de grundlæggende stringersystemer, se (figur 13) ses randen at være inddelt i afsnit, som er enten dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri, hvilket svarer til membranskallers generelle understøtningsmuligheder.

En skiveskal kan tilsvarende principielt være understøttet på tre måder langs randen:

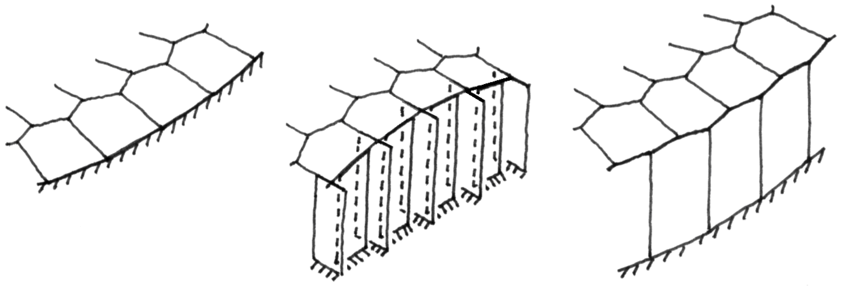
1 Dobbeltunderstøttet, hvilket betyder at hver skive langs randen er understøttet i to retninger, fx langs to kanter

2 Enkeltunderstøttet, hvilket betyder at hver skive langs randen er understøttet i én retning, fx langs en kant

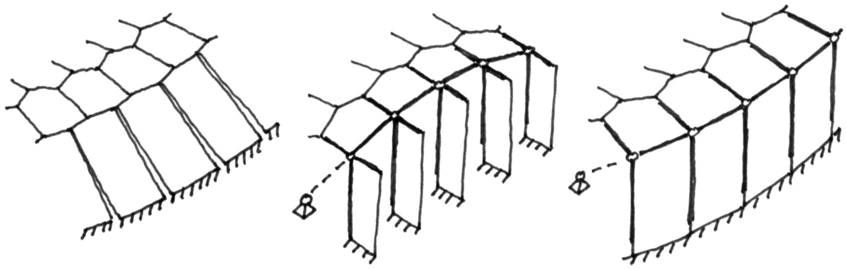
3 Fri, hvilket betyder at skiverne langs randen ikke er understøttet.

Dobbeltunderstøtninger

Skiveskallers dobbeltunderstøtninger kan eksempelvis udformes på følgende måder (figur 17).



a) b) c)



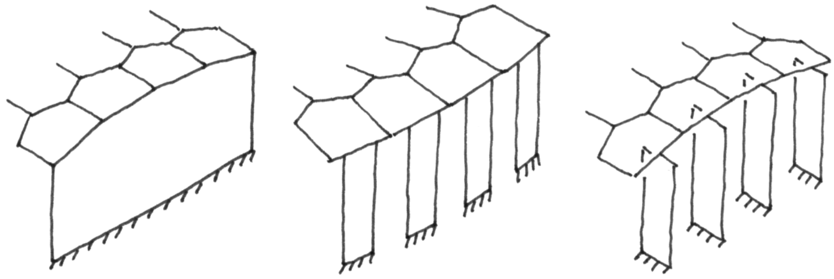
d) e) f)

Figur 17. Eksempler på dobbeltunderstøtninger.

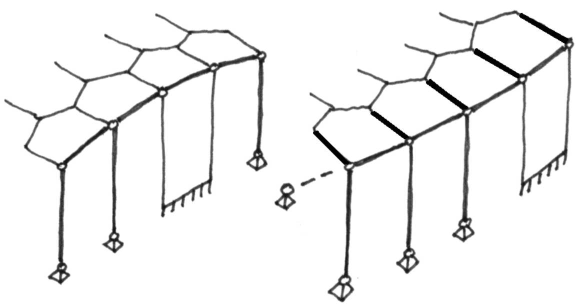
a) Skiverne langs randen er simpelt understøttet.
b) Skiverne langs randen er hver understøttet på to skiver - her vist lodrette - som er simpelt understøttet.
c) Skiverne langs randen er hver understøttet på to skiver - her vist lodrette - som er simpelt understøttet. De understøttende skiver udgør en nul-krum skiveskal. Alle hjørner er tregrenede.
d) Skiverne langs randen er hver understøttet på to skiver - her vist skrå og i forlængelse af skalfladen - som er simpelt understøttet. De understøttende skiver er ikke forbundet indbyrdes.
e) Skiverne langs randen er hver understøttet på to stænger. Alle hjørner langs randen er firgrenede og de er derfor forsynet med knuder og et lokalt stangsystem langs de samlinger, der støder op til knuderne. Stangsystemet er fastholdt af simpelt understøttede lodrette skiver, der er placeret vinkelret på randen.
f) Skiverne langs randen er hver understøttet på to stænger. Alle hjørner langs randen er firgrenede og de er derfor forsynet med knuder og et lokalt stangsystem langs de samlinger, der støder op til knuderne. Stangsystemet er fastholdt af simpelt understøttede lodrette skiver, der er placeret langs randen og udgør en nul-krum skiveskal.

Enkeltunderstøtninger

Skiveskallers enkeltunderstøtninger kan eksempelvis udformes på følgende måder (figur 18).



a) b) c)



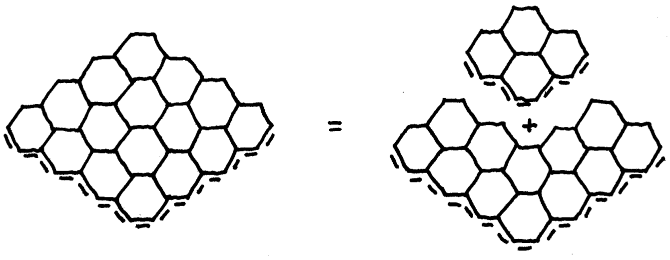
d) e)

Figur 18. Eksempler på enkeltunderstøtninger.

a) Enkeltunderstøtning i form af en plan skive, der kan optage forskydningskræfter i skivens plan. Den plane skive er simpelt understøttet.
b) Enkeltunderstøtninger i form af en fritstående skive per randskive. De fritstående skiver er simpelt understøttede og kan optage forskydningskræfter.
c) Som b) men understøtningsskiverne er her placeret vinkelret på randen. Velegnet til optagelse af udadrettede kræfter. Understøtningsskiverne kan – som her vist – placeres ud for hver randskive, eller ud for samlingerne mellem skalfladens randskiver.
d) Enkeltunderstøtning i form af en randstringer bestående af en kæde af stænger med knuder i hvert hjørne, lodrette søjler samt en enkelt simpelt understøttet skive. Randstringer, søjler og skive ligger i samme plan. Understøtningen kan optage forskydningskræfter langs randen.
e) Som d), men her ligger randstringeren ikke i plan med søjler og understøtningsskive. De tilstødende samlinger skal derfor forsynes med stænger, der kan overføre kræfter fra skiverne til knuderne.

Understøtning af skaller på skaller

En successivt opbygget skiveskal kan opdeles på tværs af opbygningsretningen så den danner to skalflader, der hver udgør et successivt opbygget system (figur 19).



Figur 19. Et system kan deles i - eller sættes sammen af - to systemer der på den ene side af delelinien er fri og langs den anden side dobbeltunderstøttet.

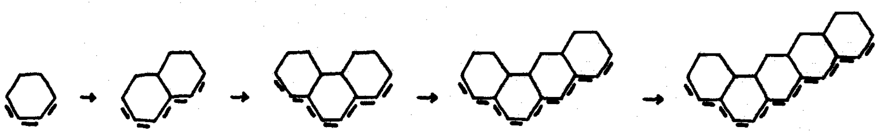
Elementerne langs den ene side af delelinien er fri og langs den anden side er de dobbeltunderstøttet. Det vil sige at:

En fri rand på én skalflade, kan udnyttes som dobbeltunderstøtning for en anden skalflade.

Dette kan specielt udnyttes når en skalkonstruktion ønskes sammensat af skalflader med forskellige krumningsmål.

1.4.4 Dobbeltunderstøttede randes stabilitetsforhold

I successivt opbyggede skivesystemer er der altid et element – det første – der er understøttet langs tre linier. I disse systemer kan delsystemet bestående af elementerne langs den dobbeltunderstøttede rand i sig selv betragtes som successivt opbygget og det er dermed stabilt (idet vi forudsætter at stabilitetsbetingelse 2 - at de tre støttelinier ikke skærer hinanden i samme punkt - er opfyldt for hele systemet) (Figur 20).



Figur 20. En successivt opbygget dobbeltunderstøttet rand.

En successivt opbygget dobbeltunderstøttet rand udgør således et stabilt statisk bestemt system. Yderligere understøtninger vil gøre systemet statisk ubestemt.

Eksempel

Stringersystem D, se (figur 13), er et eksempel på ikke-successivt opbygget system, hvor de dobbeltunderstøttede rande er successivt opbygget, mens det indre er ikke-successivt opbygget.

1.4.5 Ikke-Successivt opbyggede systemer

Dobbeltunderstøttede systemer

Det kan vises, se (Almegaard 2003), at:

Stringersystemer, hvis understøttede rande alle er successivt opbyggede dobbelt-understøttede rande, er stabile.

Dette betyder at skivesystemer, der svarer til stringersystem D, se (figur 13), hvis rande er successivt opbyggede, er stabile.

Enkeltunderstøttede systemer

En konveks facetteret flade er defineret ved at det for alle facetter gælder, at alle øvrige facetter ligger på samme side af den betragtede facets plan.

For facetterede flader med tregrenede hjørner, ses dette umiddelbart kun at gælde, hvis alle facetter er konvekse. En konveks skiveskal er således positiv krum.

Cauchy har vist at lukkede konvekse triangulerede systemer er stabile (Cauchy 1813). På dette grundlag kan det vises, se (Almegaard 2003), at en konveks enkeltsammenhængende trekantfacetteret gitterflade er stabil og fastholdt, når hver randknude er konvekst enkeltunderstøttet[3] og konstruktionen derudover er understøttet i tre retninger. Ved hjælp af dualtransformationen og dens krumningsbevarende egenskaber kan vi slutte at:

Et enkeltsammenhængende konvekst skivesystem, som er enkeltunderstøttet langs hele randen, er stabilt, hvis det derudover er understøttet langs tre linier.

Dette betyder at konvekse skivesystemer, der svarer til stringersystem C, se (figur 13), er stabile. Det betyder i det hele taget, at alle konvekse skiveskaller med tregrenede hjørner, der er enkeltunderstøttet langs hele randen og derudover er understøttet langs tre linier, er stabile, idet beviset er uafhængigt af stringersystemet.

---

[3] Et gitter er *konvekst enkeltunderstøttet*, når understøtningerne betragtet som stænger udspænder en flade, der sammen med gitterfladen danner en konveks facetteret flade.

1.4.6 Konklusion

Der kan opstilles følgende tilstrækkelige, men ikke nødvendige, geometriske betingelser for at en skiveskal er stabil:

– En skiveskal, der er successivt opbygget, er stabil.

– En skiveskal, der består af sekskantede elementer og hvis stringere i det tilhørende stringersystem alle er understøttet på successivt opbyggede dobbeltunderstøttede rande, er stabil.

– En konveks enkeltsammenhængende skiveskal, hvis randelementer er understøttet mindst en gang og hvor mindst tre randelementer er understøttet to gange, er stabil.

Det forudsættes her at understøtningerne tilsammen kan fastholde et stift legeme i rummet.

1.4.7 Design af skiveskaller

På grundlag af stringermetoden samt modelforsøg og beregninger er der i (Almegaard 2003) opstillet en række membranskalkonfigurationer - og hermed menes kombinationer af krumningsmål, randformer og understøtninger - der er både stabile og stive.

Udover ovennævnte betingelser for stabile skiveskaller kan der på baggrund af disse konfigurationer opstilles følgende retningslinier for design af skiveskaller:

– Ikke-successivt opbyggede positivt krumme skiveskaller er generelt stive.

– Udkragede positivt krumme skiveskaller er generelt ikke stive.

– Lange rette rande på skiveskaller skal generelt afstives eller enkeltunderstøttes, da kravene til randelementernes bøjningsstivhed ellers bliver meget store.

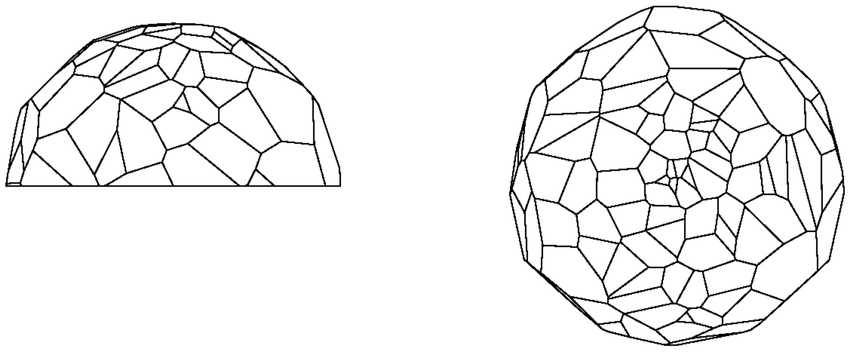
– Successivt opbyggede negativt krumme skiveskaller er generelt stive.

– Ikke-successivt opbyggede negativt krumme skiveskaller kan være stabile, men er ofte ikke stive.

1.4.8 Eksempel 1

En skiveskal kan udformes på grundlag af en krum analytisk flade ved at dele den op i plane elementer, *facetter*, ved hjælp af tangentfacettering (se Hansen 1988 og Almegaard 2003). Et antal tangentpunkter på den krumme flade udvælges og de tilhørende tangentplaner og deres indbyrdes skæringslinier danner herefter den facetterede flade.

Bestemmes tangentpunkterne tilfældigt, for eksempel ved at lade en tilfældighedsgenerator finde tangentpunkterne, fremkommer kun tregrenede hjørner (Figur 21).

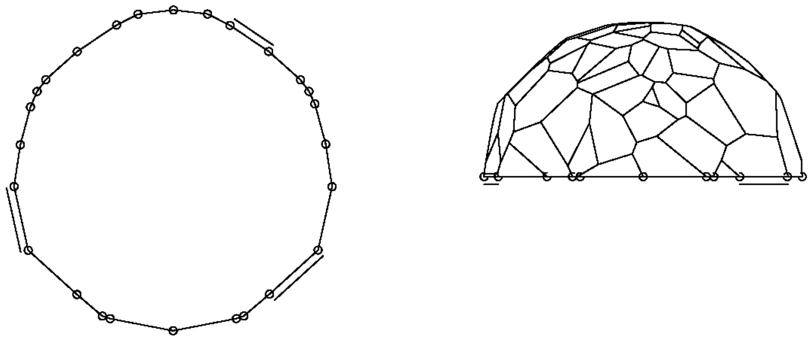


Opstalt Plan

Figur 21. En tilfældigt facetteret halvkugle.

Da en konveks enkeltsammenhængende skiveskal er stabil, hvis alle randelementer er understøttet mindst en gang og mindst tre randelementer er understøttet to gange, vil en kuppel kunne udformes som en tilfældigt facetteret halvkugle, der er enkeltunderstøttet langs hele randen og derudover er understøttet langs tre linier.

Enkeltunderstøtningen kan udformes som vist i (figur 18 e) idet de lodrette søjler kan erstattes af simple bevægelige understøtninger. De tre ekstra understøtningslinier skal da ligge i det vandrette plan for at skallen er stabil betragtet som et stift legeme (Figur 22).



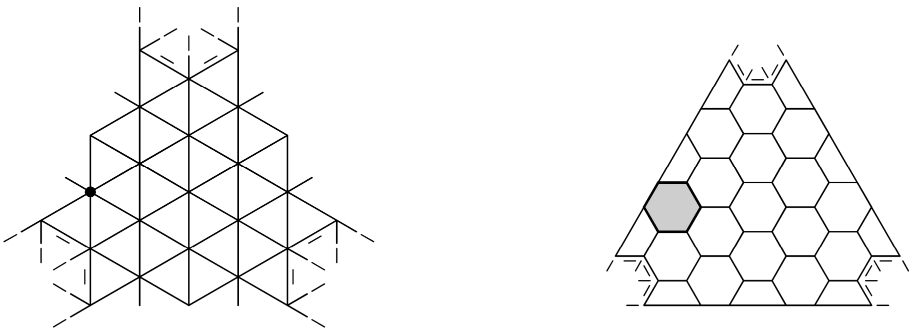
Plan Opstalt

Figur 22. Randen kan understøttes lodret i hjørnepunkterne (vist med cirkler), hvis konstruktionen forsynes med stænger langs randen og de tilstødende samlinger. Derudover skal den understøttes langs tre vandrette linier (vist med streger) for at være stabil.

1.4.9 Eksempel 2

For at undersøge om stringermetoden kunne anvendes i praksis og om skaller kunne opbygges af skiveelementer blev der i 1991 iværksat et fuldskalaforsøg med en skiveskal baseret på stringersystem D (Figur 23 og 24).

Figur 23. Fuldskalamodel på SBi i Hørsholm. Eksempel på positivt krum ikke-successivt opbygget skiveskal, baseret på system D, med fri rande der ikke er udkragede. Stringersystem og skivesystem fremgår af figur 24. Understøtningerne udgør i sig selv tre nul-krumme skiveskaller.

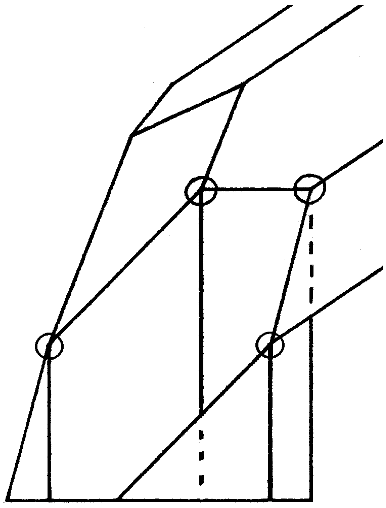


Figur 24. Fuldskalamodellens positivt krumme skaldels stringersystem i vandret projektion til venstre og selve skaldelen til højre. I systemet til venstre repræsenterer hver knude et skiveelement. Understøtninger er vist som en kort streg i forlængelse af – eller parallel med – den understøttede stringer. Til højre er hver understøtning vist med en kort streg parallelt med eller i forlængelse af den skivekant, der skal understøttes. En knude og det tilsvarende skiveelement er fremhævet.

Understøtningerne

Understøtningerne er udformet som lodrette sekskantede rør der er skråt afskårne og udgør i sig selv tre nul-krumme skiveskaller. Hver af disse skaller består af fem lodrette skiver der er simpelt understøttet på en stiv plade i grundplanen (figur 25 a).

a)



b)

Figur 25. a) Fuldskalamodellens understøtninger består af fem lodrette skiver der er simpelt understøttet på en stiv plade i grundplanen. b) Understøtningerne er udformet så der fremkommer fire firgrenede hjørner (markeret med cirkler).

Randen er således dobbeltunderstøttet og kan opbygges successivt jf. (figur 17 og 20). Da randsystemet i dette tilfælde udgør hele skallen, er skallen dermed stabil. Understøtningerne kan således betragtes som udkragede dobbeltunderstøttede skaller.

Skallen

Den positivt krumme skal er dobbeltunderstøttet på understøtningernes frie rand. For at opnå det nødvendige antal understøtninger er konstruktionen udformet således at der fremkommer fire firgrenede hjørner (figur 25 b). Dobbeltunderstøtningerne er dermed udformet som vist i (figur 17 f).

Fuldskalamodellen viste sig at være stabil og stiv. Den står fortsat på SBi (september 2007), hvor den kan beses.

1.5 Litteratur

Almegaard Ohlsen, H. (1988). *Facettering af dobbeltkrumme flader: Et katalog*. København: Kunstakademiets Arkitektskole.

Almegaard, H. (2003). Skalkonstruktioner – metoder til afklaring af sammenhængene mellem form, stabilitet, stivhed og understøtningsforhold. Ph.D. afhandling, Kunstakademiets Arkitektskole, København, 2002. By og Byg.

Almegaard H. (2004a). *The stringer system – a truss model of membrane shells for analysis and design of boundary conditions.* International Journal of Space Structures, Vol. 19, No. 1, 1-10.

Almegaard H. (2004b). *Stability of facetted translation shells.* IASS symposium Montpellier 2004.

Buhelt, M., Nielsen, J.& Staalby, J. E. (1976) *Skivebygningers stabilitet 1.* SBI anvisning 82. Hørsholm: Statens Byggeforskningsinstitut.

Cauchy A. L. (1813). *Sur les polygones et le polyèdres.* J. de l'École Polytechnique, XVIe Cahier IX, 87-89.

Fabricius-Bjerre, F. (1977). *Lærebog i geometri II* (6. udg.). Lyngby: Polyteknisk Forlag.

Hansen, K. F. (1988). *Regulære skivekonstruktioner*. Rapport 189. Lyngby: Danmarks Tekniske Højskole, Instituttet for Husbygning.

Hansen, K. F. (1991). *Geometrisk modellering til brug i datamat*. SBI-Rapport 215. Hørsholm: Statens Byggeforskningsinstitut.

Makowski, Z. S. (Ed.) (1984). *Analysis, Design and Construction of Braced Domes.* Granada Publishing, Great Britain.

Vanggaard, O. (1979) *Skalkonstruktioner med firkantede træelementer.* Nordisk træsymposium 1979. Hørsholm: Statens Byggeforskningsinstitut.

Vanggaard O. and Thorsteinn E. (1995). *Trans Space Structures*. Kunstakademiets Arkitektskole. Denmark.

Wester, T., & Hansen, K. F. (1985). *Skive- og gittervirkning i rumlige netværk.* København: Kunstakademiets Arkitektskole, Skivelaboratoriet.

Wester, T. (1987). *Dualisme og syntese for kræfter og former*. København: Eget forlag.

Bemærk:
Hvor der i teksten henvises til (Almegaard 2003) kan man i stedet benytte artíklen *Stringermetoden - En metode til analyse og design af skaller og deres understøtninger*. I Bygningsstatiske Meddelelser Årgang LXXVIII, Nr. 1, marts 2007.

Artikel modtaget august 2007

Diskussion åben indtil februar 2008

DANSK SELSKAB FOR BYGNINGSSTATIK

Anmodning om optagelse i selskabet indsendes til et af bestyrelsens medlemmer:

Flemming Petersen (formand), Tlf. 45 97 20 48
COWI, Parallelvej 2, 2800 Kgs. Lyngby

Erik Stoltzner (sekretær), Tlf. 33 41 34 36
Vejdirektoratet, Postboks 9018, Niels Juels Gade 13, 1022 København K

Mogens G. Nielsen (kasserer), Tlf. 45 98 60 00
Rambøll, Bredevej 2, 2830 Virum

Mads Nicolai Jensen, Tlf. 45 95 55 18
Birch & Krogboe, Teknikerbyen 34, 2830 Virum

Holger Koss, Tlf. 72 15 77 00
FORCE, Hjortekærvej 99, Bygning 118, 2800 Kgs. Lyngby

Henrik Mørup, Tlf. 48 10 42 00
NIRAS, Sortmosevej 2, 3450 Allerød

Lars Hauge, Tlf. 45 97 28 81
COWI, Parallelvej 2, 2800 Kgs. Lyngby.

Jeppe Jönsson, Tlf. 45 25 17 07
BYG•DTU, Brovej. Bygning 118, 2800 Kgs. Lyngby

Selskabets formål er at arbejde for den videnskabelige udvikling af bygningsmekanikken - både teori for og konstruktion af alle slags bærende konstruktioner - fremme interessen for faget, virke for et kollegialt forhold mellem dets udøvere og hævde dets betydning overfor og i samarbejde med andre grene af ingeniørvidenskaben. Formålet søges bl.a. realiseret gennem møder med foredrag og diskussioner samt gennem udgivelse af ”Bygningsstatiske Meddelelser”.

Som medlemmer kan optages personlige medlemmer, firmaer og institutioner, som er særligt interesserede i bygningsmekanik, eller hvis virksomhed falder indenfor bygnings-mekanikkens område.

Det årlige kontingent er for personlige medlemmer 300 kr., for firmaer samt institutioner 1.800 kr. Studerende ved Danmarks Tekniske Universitet og andre danske ingeniørskoler samt indtil 2-års kandidater kan optages som juniormedlemmer uden stemmeret for et årskontingent på 80 kr. Pensionerede medlemmer med mindst 10 års medlemsanciennitet kan opnå status som pensionistmedlem med stemmeret for et årskontingent på 100 kr.

Selskabets medlemmer modtager frit ”Bygningsstatiske Meddelelser”, der udsendes kvartalsvis. Endvidere publiceres ”Bygningsstatiske Meddelelser” på Selskabets hjemmeside www.dsby.dk. Manuskripter til optagelse i ”Bygningsstatiske Meddelelser” modtages af redaktøren.